



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



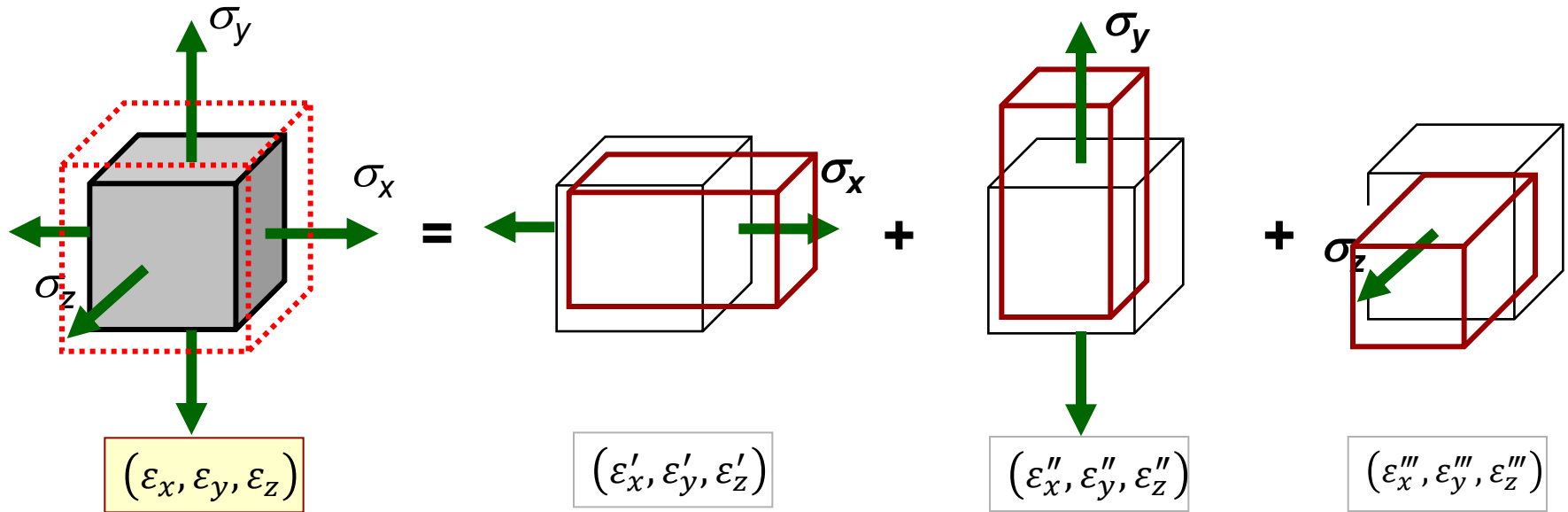
Ćwiczenia 4

Prawo Hooke'a - zadania

Przykłady zadań z wykorzystaniem prawa Hooke'a

Uogólnione prawo Hooke'a

Rozważmy stan naprężenia jako superpozycję trzech stanów prostego rozciągania



$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon'_x &= \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon'_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon'_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E}\end{aligned}$$

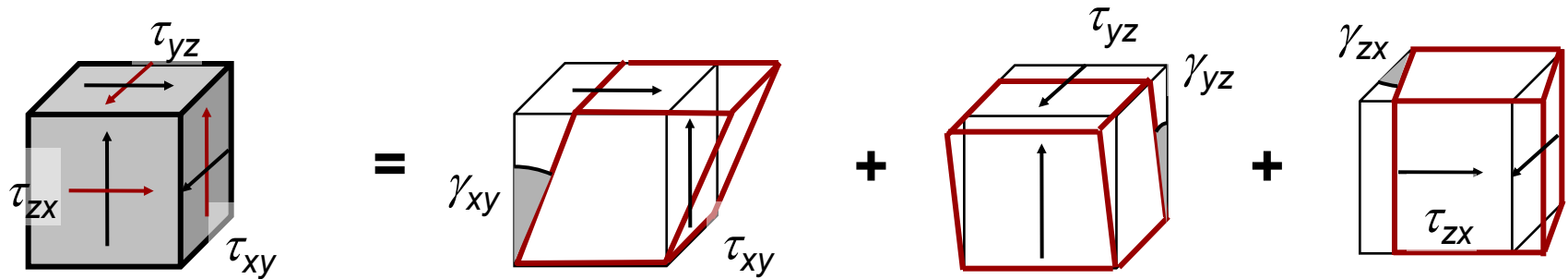
$$\begin{aligned}\epsilon''_x &= -\nu \frac{\sigma_y}{E} \\ \epsilon''_y &= \frac{\sigma_y}{E} \\ \epsilon''_z &= -\nu \frac{\sigma_y}{E}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon'''_x &= -\nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon'''_y &= -\nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon'''_z &= \frac{\sigma_z}{E}\end{aligned}$$

Efektom działania naprężeń normalnych jest stan odkształceń liniowych

Uogólnione prawo Hooke'a

Rozważmy stan naprężenia jako superpozycję trzech stanów ścinania kolejno w trzech płaszczyznach



Efektom działania naprężeń tnących jest stan odkształceń postaciowych

$$(\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$(\gamma_{xy}, 0, 0)$$

$$(0, \gamma_{yz}, 0)$$

$$(0, 0, \gamma_{zx})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned}$$

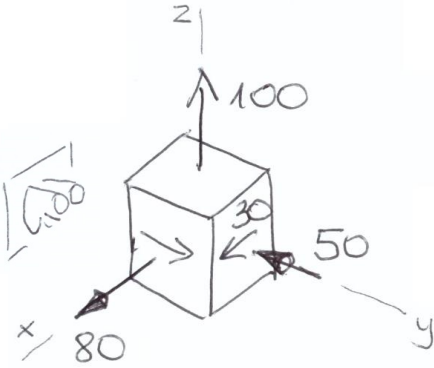
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

G - moduł Kirchhoffa

ZADANIE 4.1



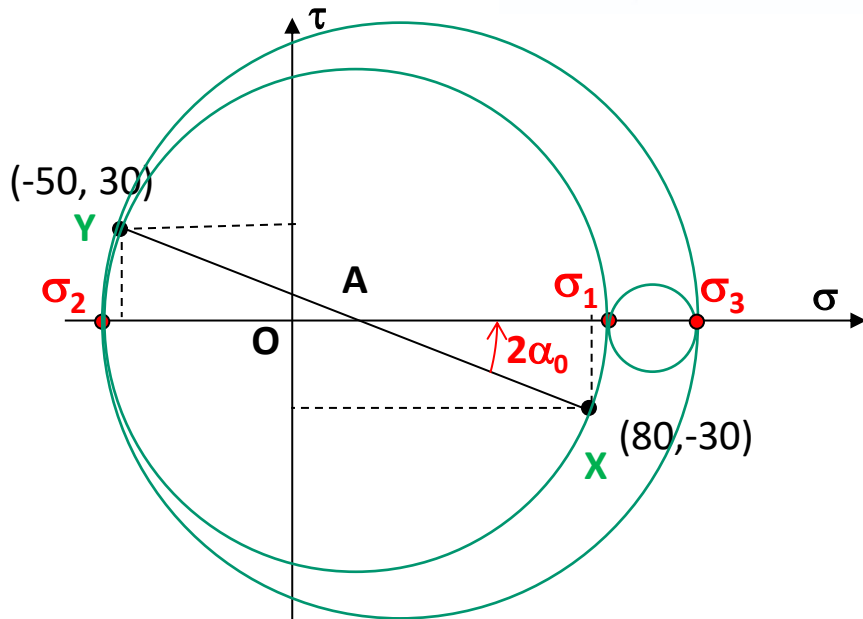
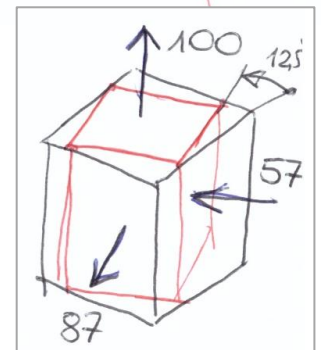
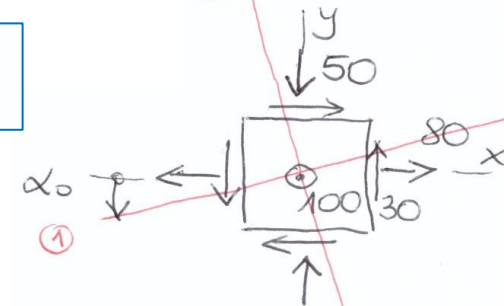
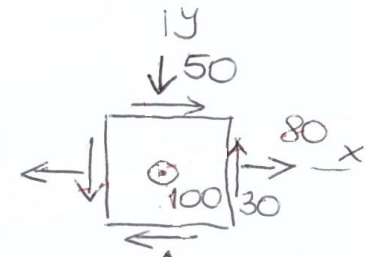
Zad. Dany jest stan naprężenia.

Znaleźć $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

materiał - stal: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

$\nu = 0.3$

Ⓡ Spójrzmy na kostkę z kierunku z



$$OA = \frac{80 - 50}{2} = 15$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{80 + 50}{2}\right)^2 + 30^2} = 72$$

$$\sigma_1 = OA + R = 87 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = OA - R = -57 \text{ MPa}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{30}{\frac{80 + 50}{2}}\right) = 12,5^\circ$$

Skorzystamy z prawa Hooke'a

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [87 - 0.3(-57 + 100)] = 0.37 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-57 - 0.3(100 + 87)] = -0.56 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [100 - 0.3(87 - 57)] = 0.455 \cdot 10^{-3}$$

ZADANIE 4.1

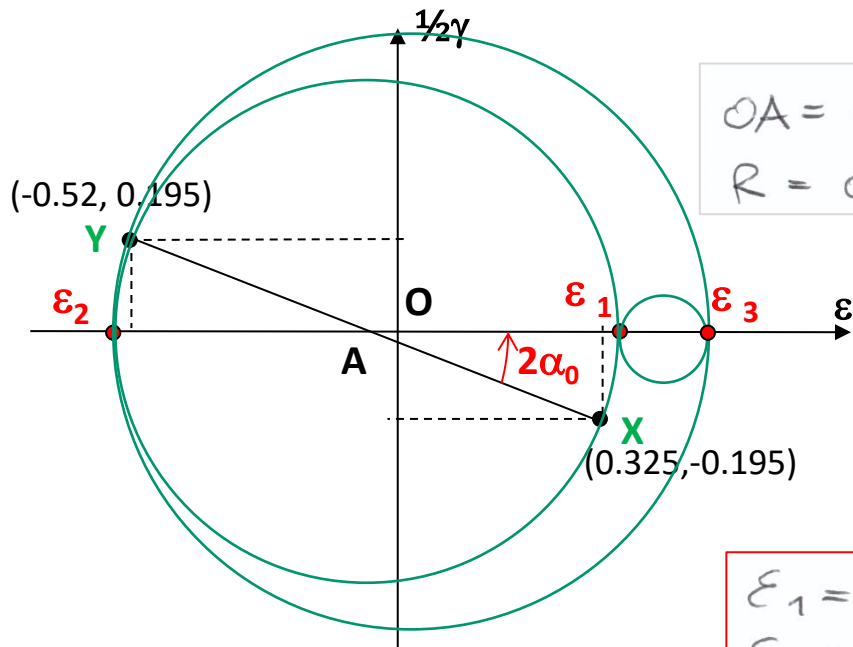
II) Sposób. Korzystamy najpierw z prawa Hooke'a

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [80 - 0.3(-50 + 100)] = 0.325 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-50 - 0.3(100 + 80)] = -0.52 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [100 - 0.3(80 - 50)] = 0.455 \cdot 10^{-3}$$

Przestęni odkształceń



$$OA = -0.095 \cdot 10^{-3}$$

$$R = 0.465 \cdot 10^{-3}$$

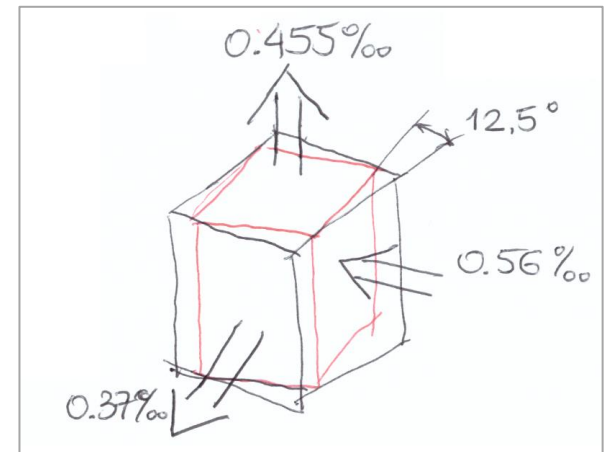
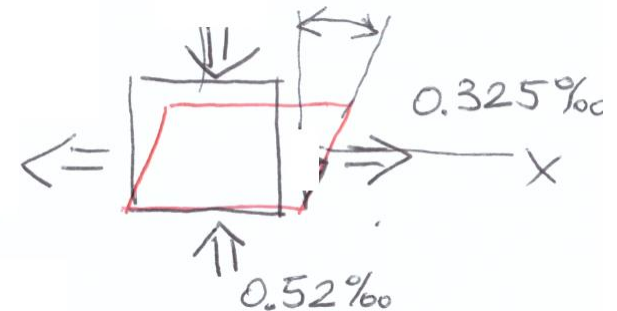
$$\varepsilon_1 = 0.37 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = -0.56 \cdot 10^{-3}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0.3)} = 7.69 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{-30}{7.69 \cdot 10^4}$$

$$\gamma_{xy} = -3.9 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

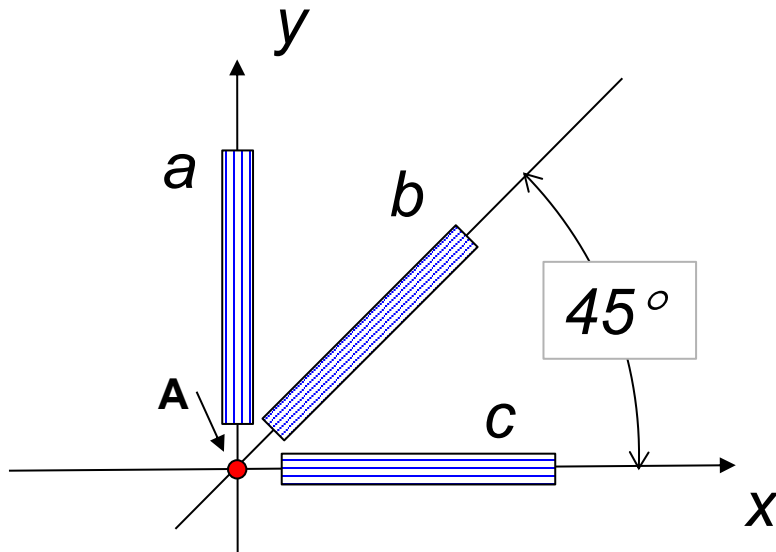


ZADANIE 4.2

W pewnym punkcie pokrycia skrzydła samolotu naklejono rozetkę trzech tensometrów **a**, **b** i **c**.

W pewnej chwili lotu zmierzono wskazania tensometrów: ε_a , ε_b , ε_c .

- 1) Wyznaczyć odpowiadający temu stan naprężenia
- 2) Określić i pokazać kierunki główne naprężenia



Material – dural

$$E = 7 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

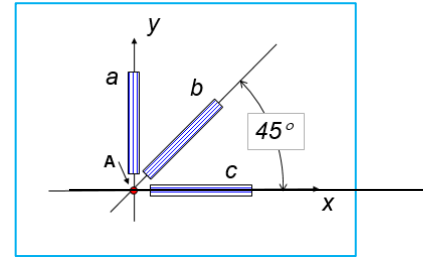
$$\nu = 0.32$$

$$\varepsilon_a = 0.4 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_b = -0.2 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_c = 0.1 \text{ ‰}$$

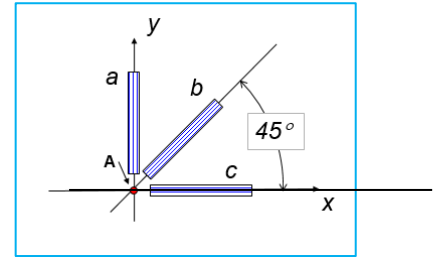
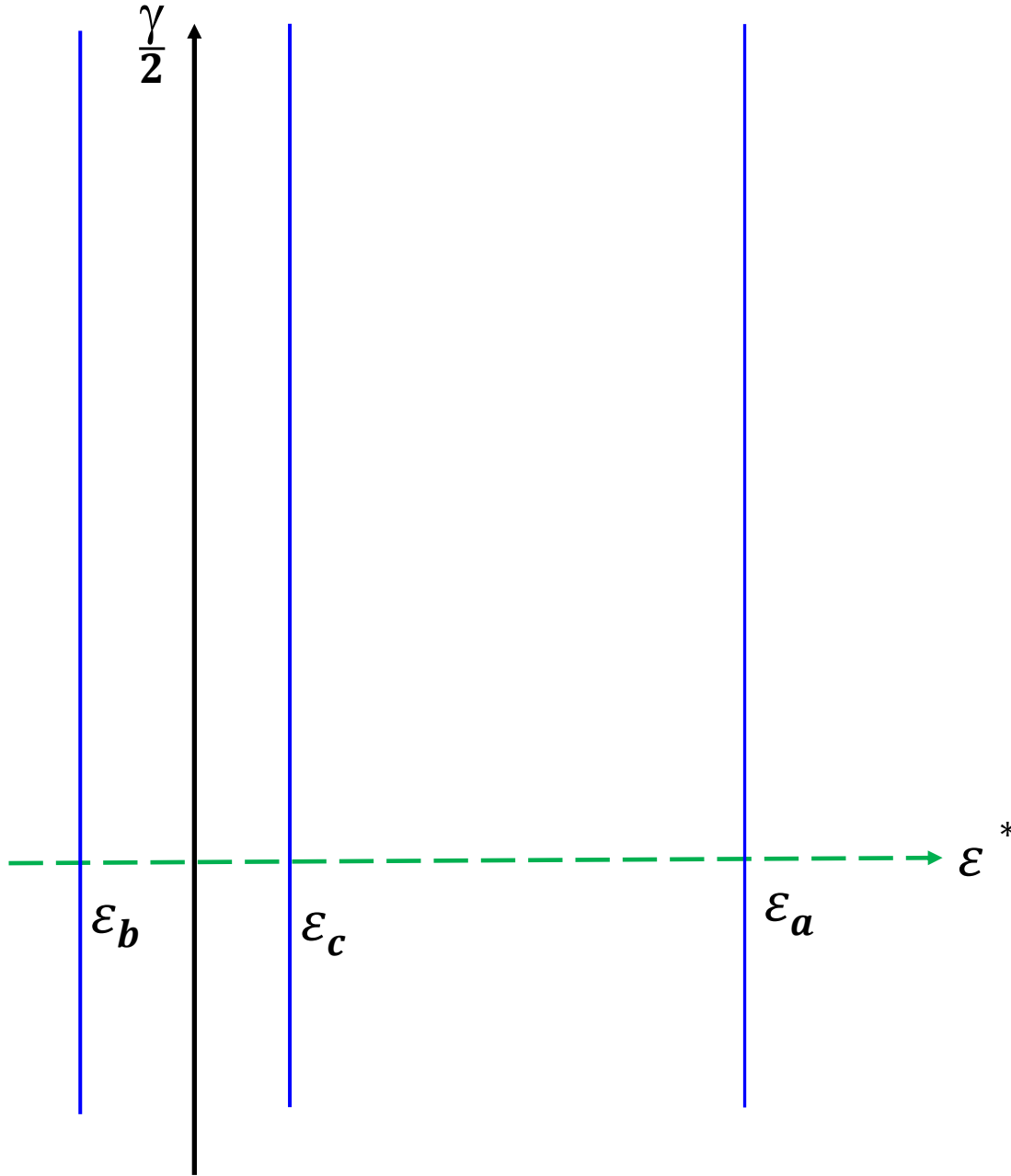
Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$



1) Rysujemy oś $\frac{\gamma}{2}$ i oś pomocniczą ε^*

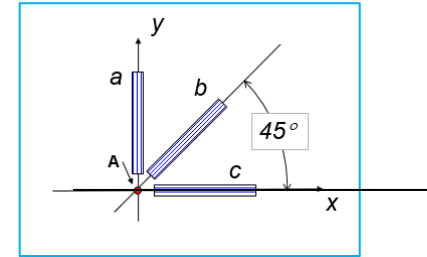
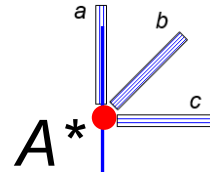
A horizontal axis with a rightward-pointing arrow, labeled ε^* . The axis is dashed green for the portion to the left of the vertical axis and solid black for the portion to the right.

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$

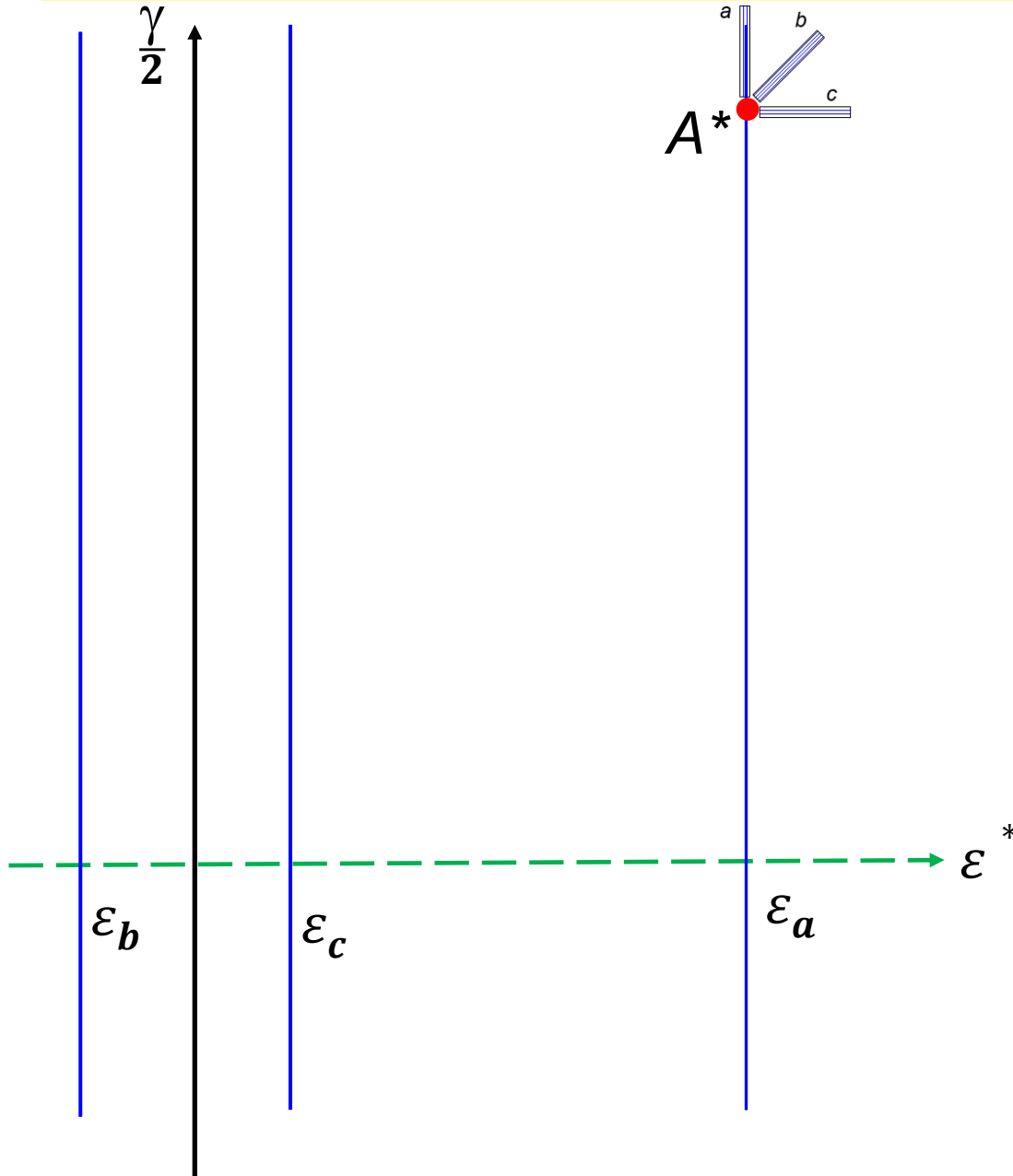


2) Rysujemy linie wskazań tensometrów

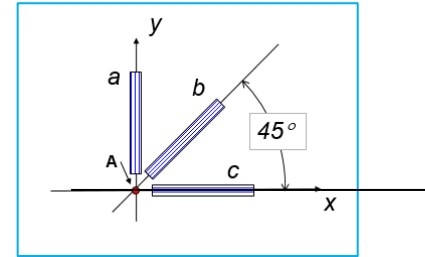
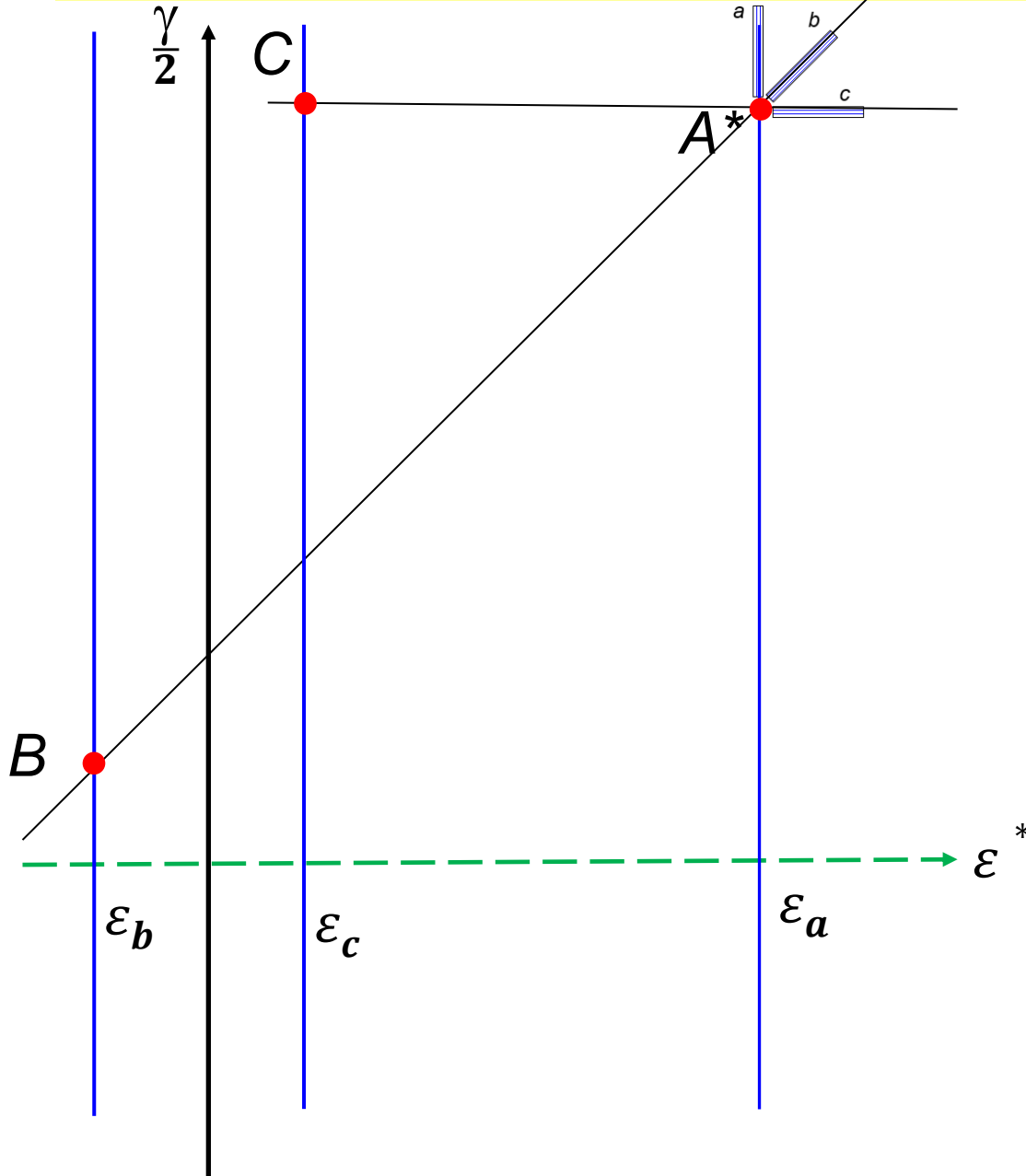
Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



3) Obieramy punkt startowy i rysujemy rozetkę zgodnie z kierunkiem odpowiedniego tensometru

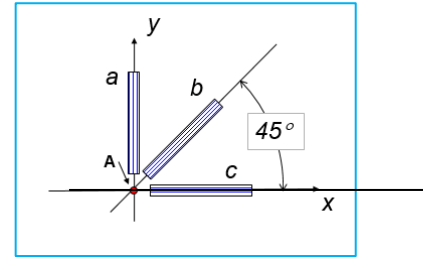
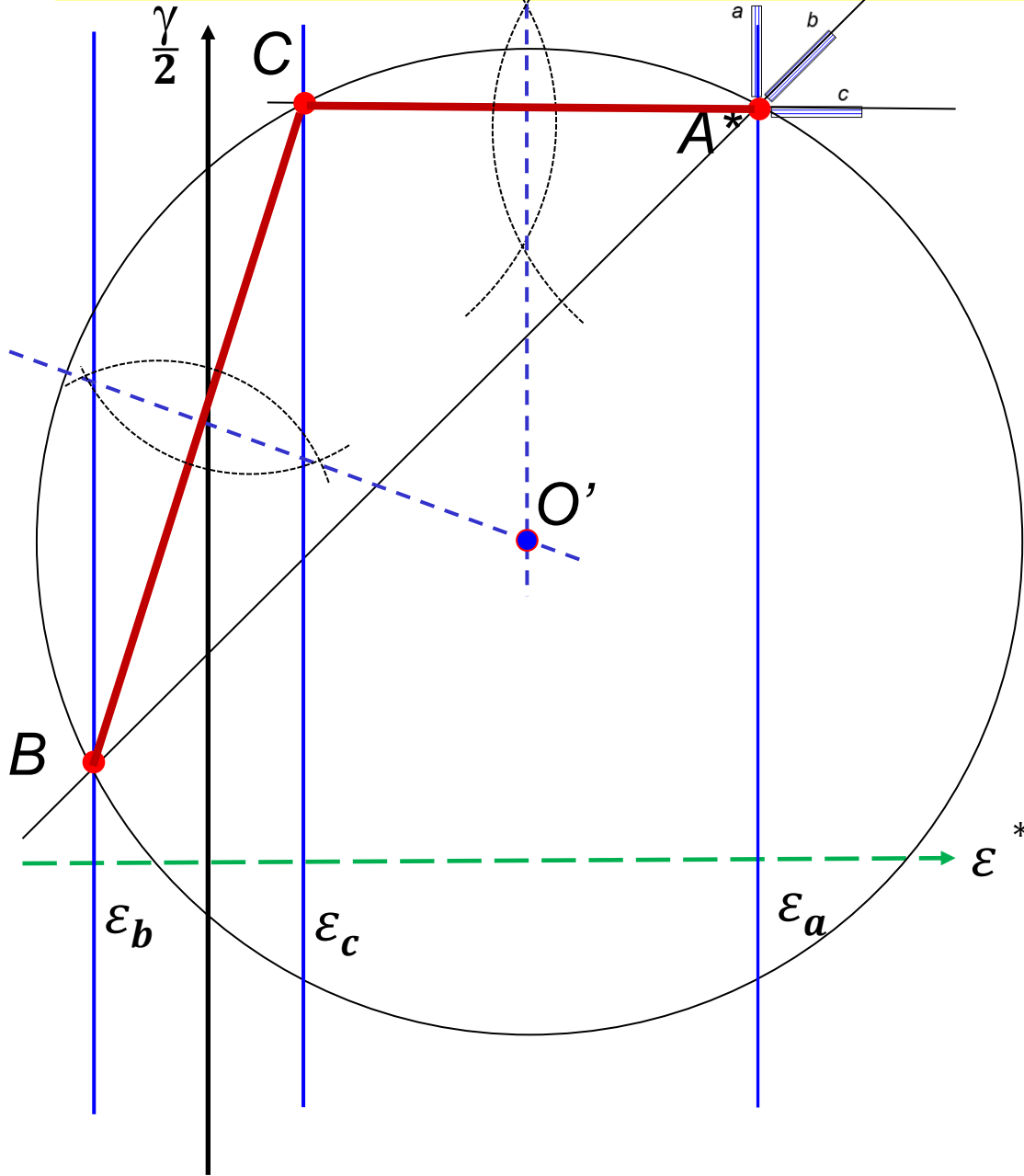


Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



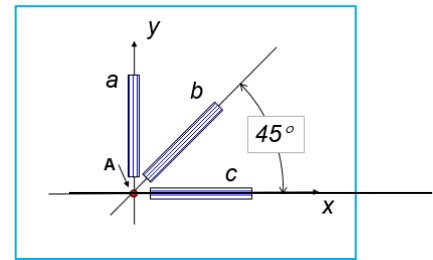
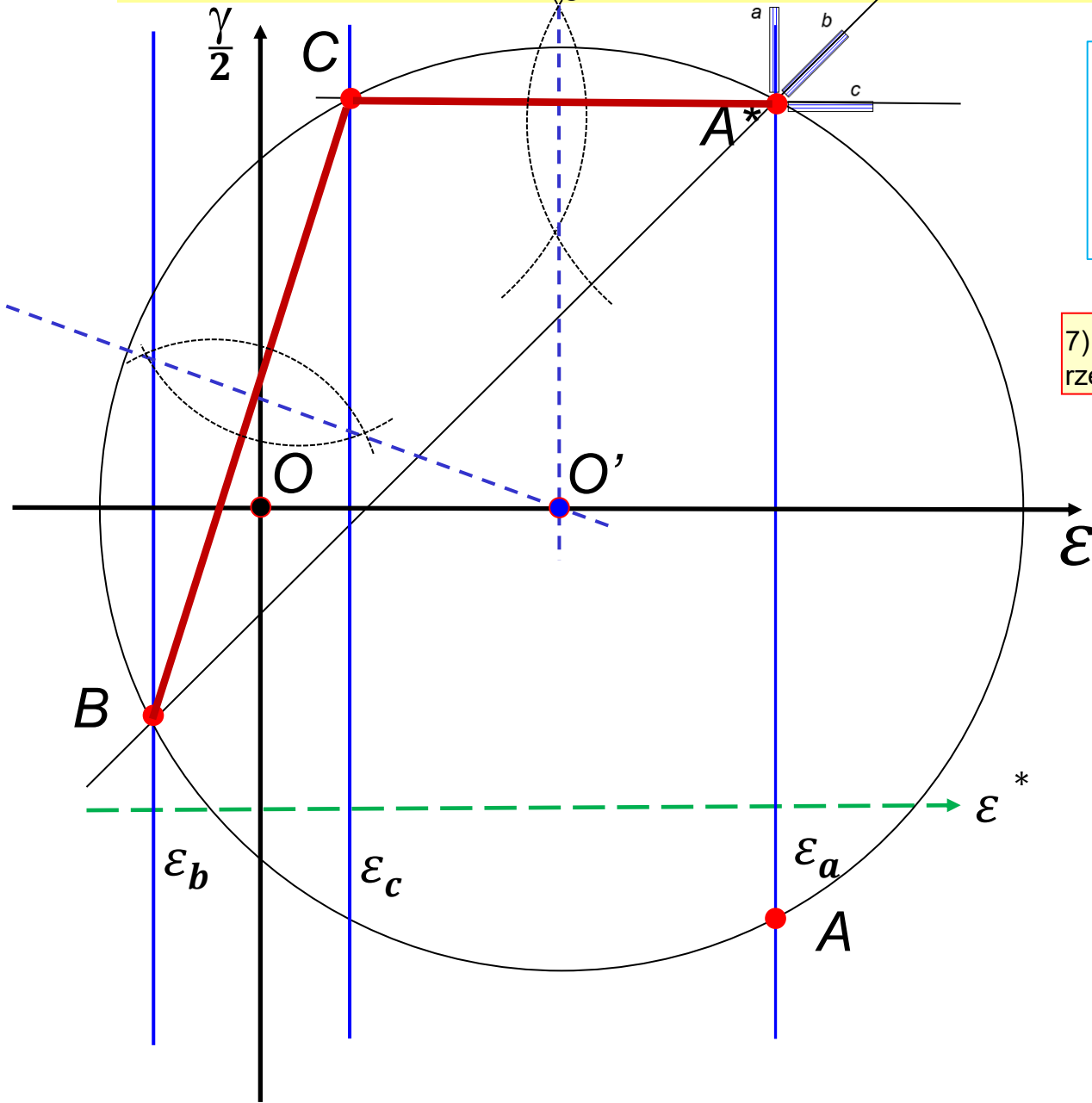
4) Rysujemy linie na kierunkach tensometrów, które przetną odpowiednie linie ich wskazań

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$



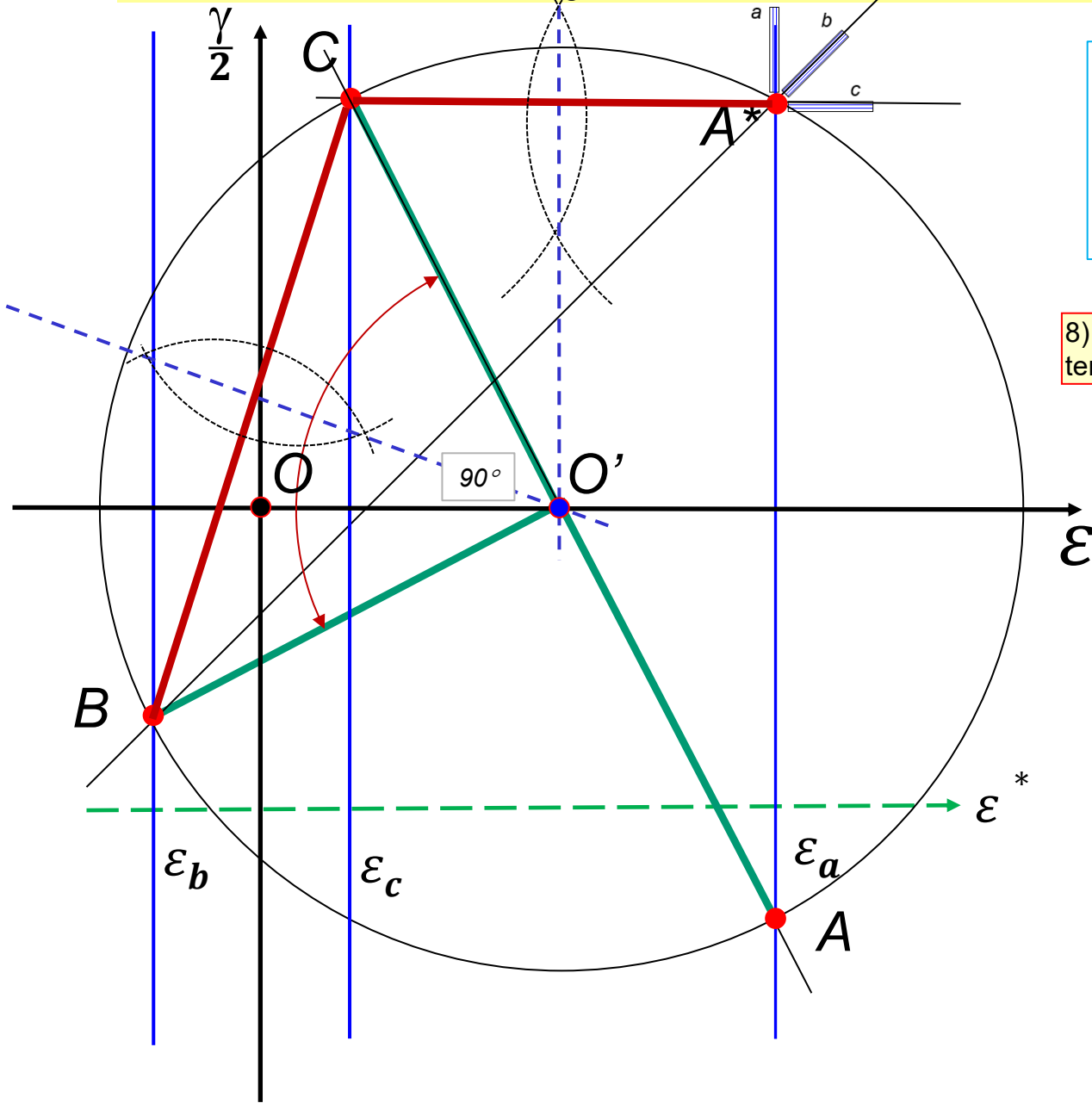
6) Rysujemy koło Mohra

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



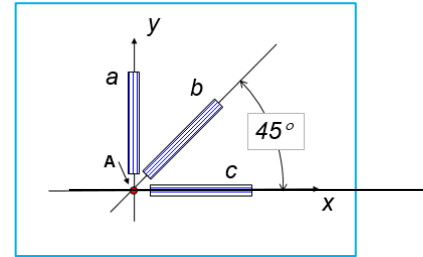
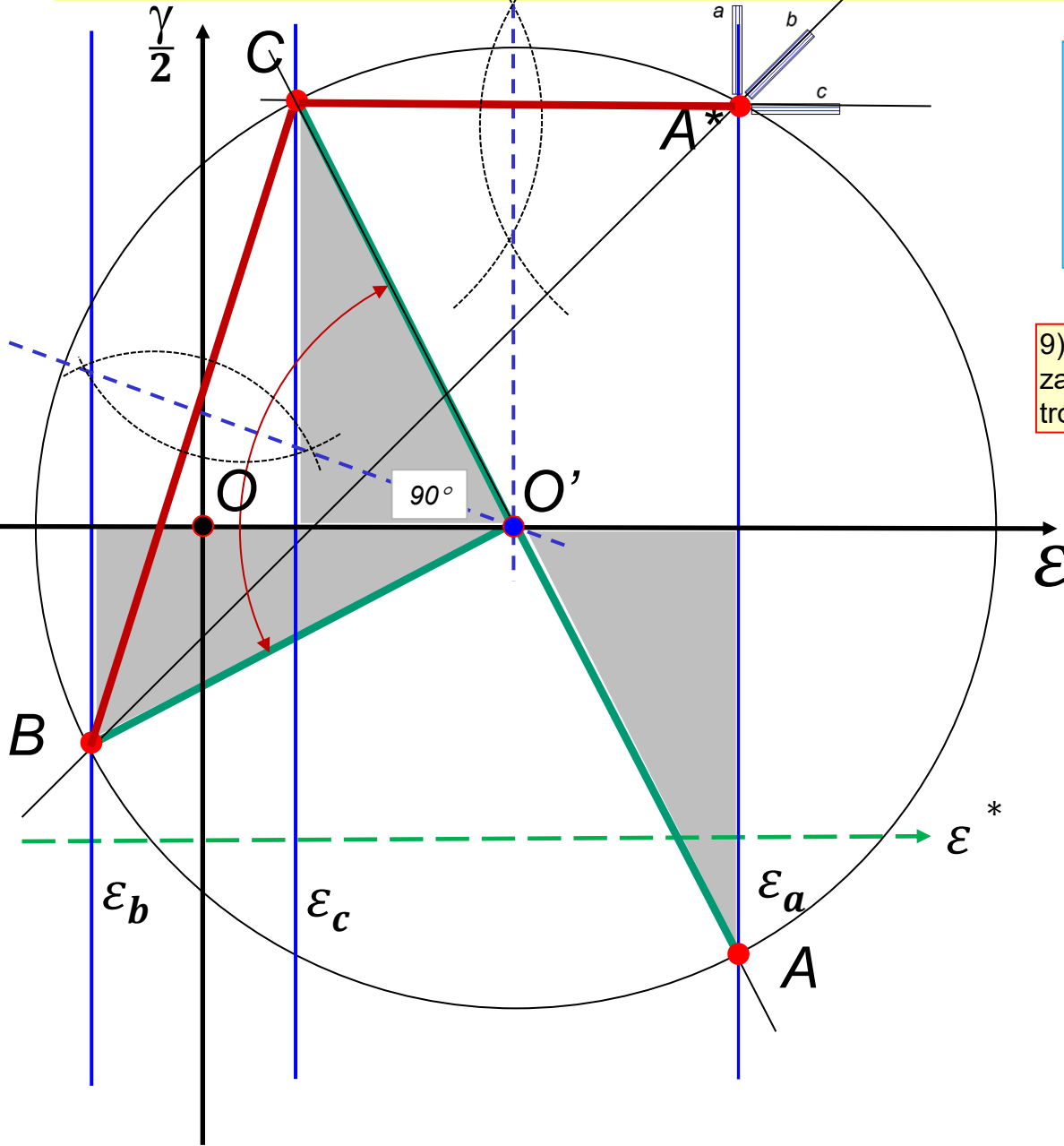
7) Rysujemy oś rzeczywistą ϵ i oznaczamy rzeczywisty punkt wskazania A

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



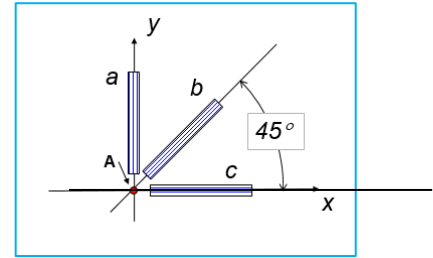
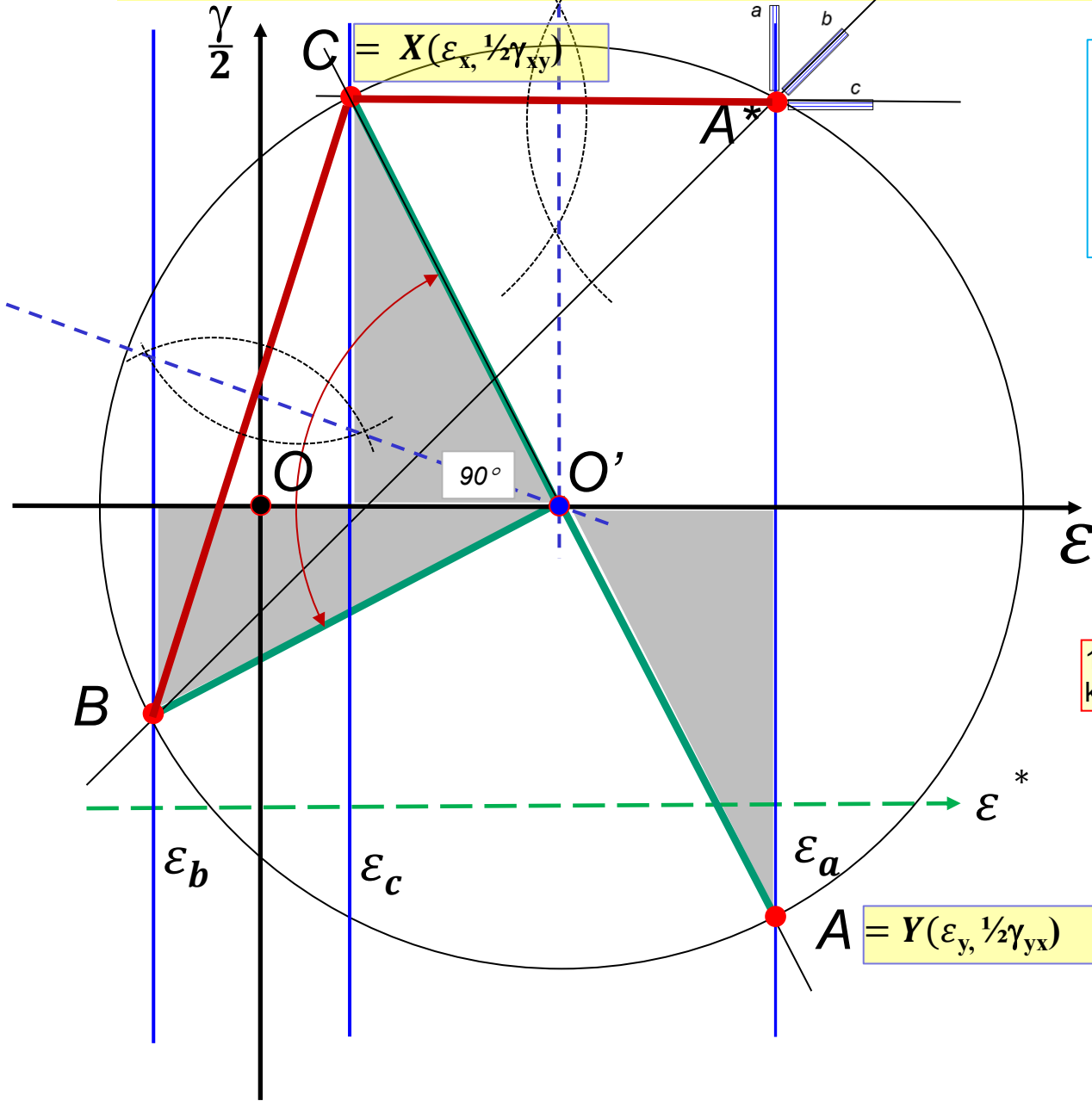
8) Punkty A, B i C są punktami wskazań tensometrów

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$



9) Dla takiej rozetki ($45^\circ/90^\circ$) można zauważyć podobieństwo odpowiednich trójkątów

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



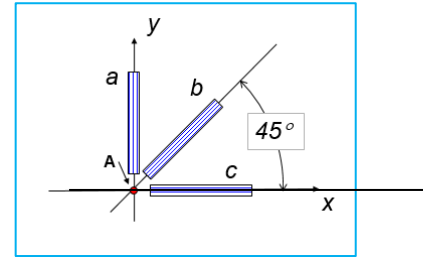
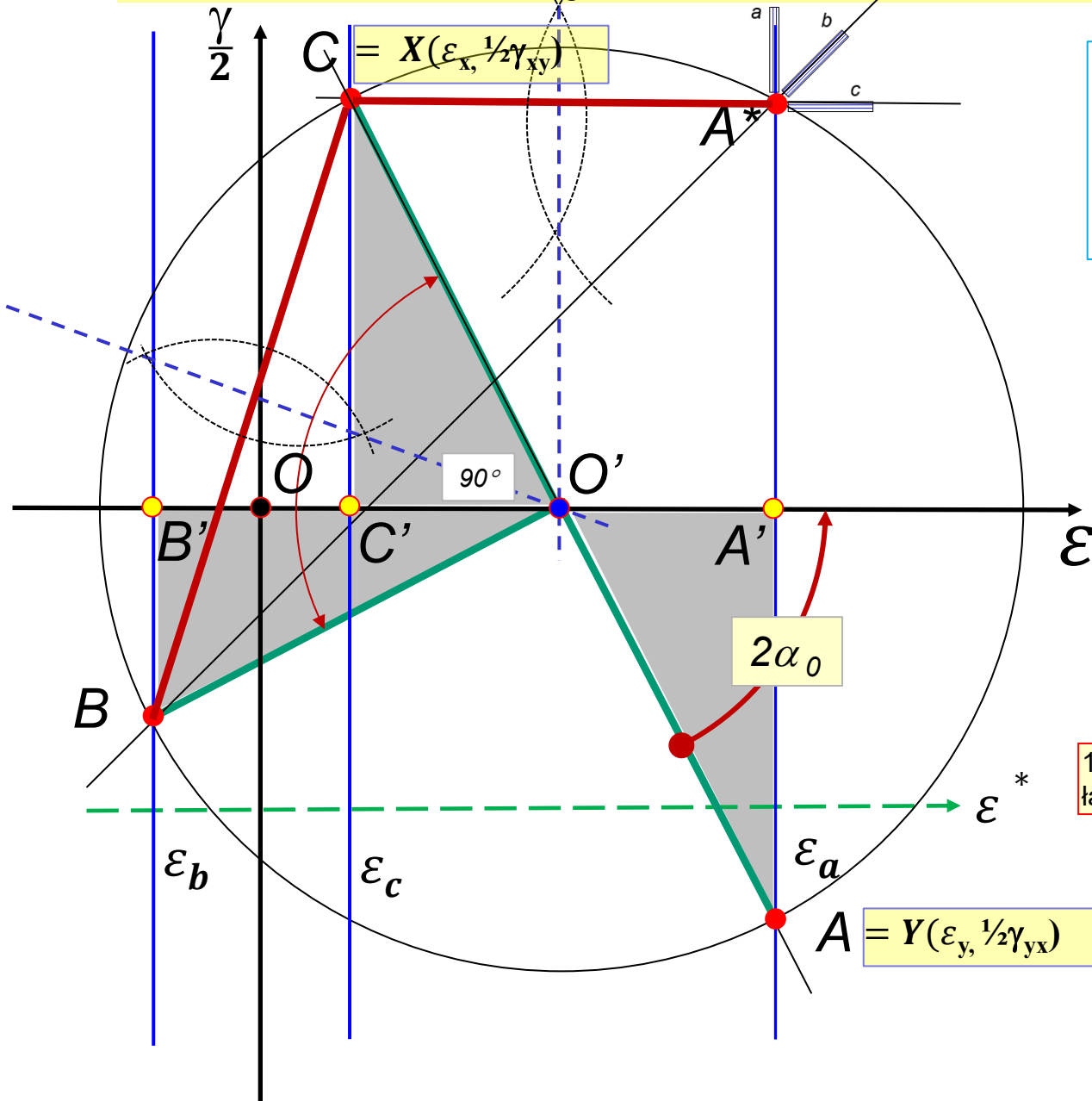
$$OO' = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) = 0.25\%$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_c = 0.1\%$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_a = 0.4\%$$

10) Możemy wskazać punkty wskazań dla kierunków X i Y

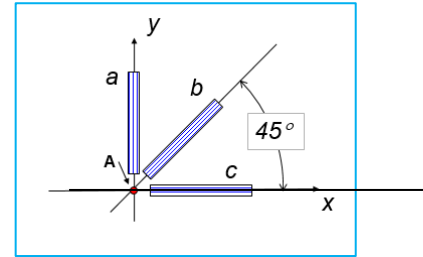
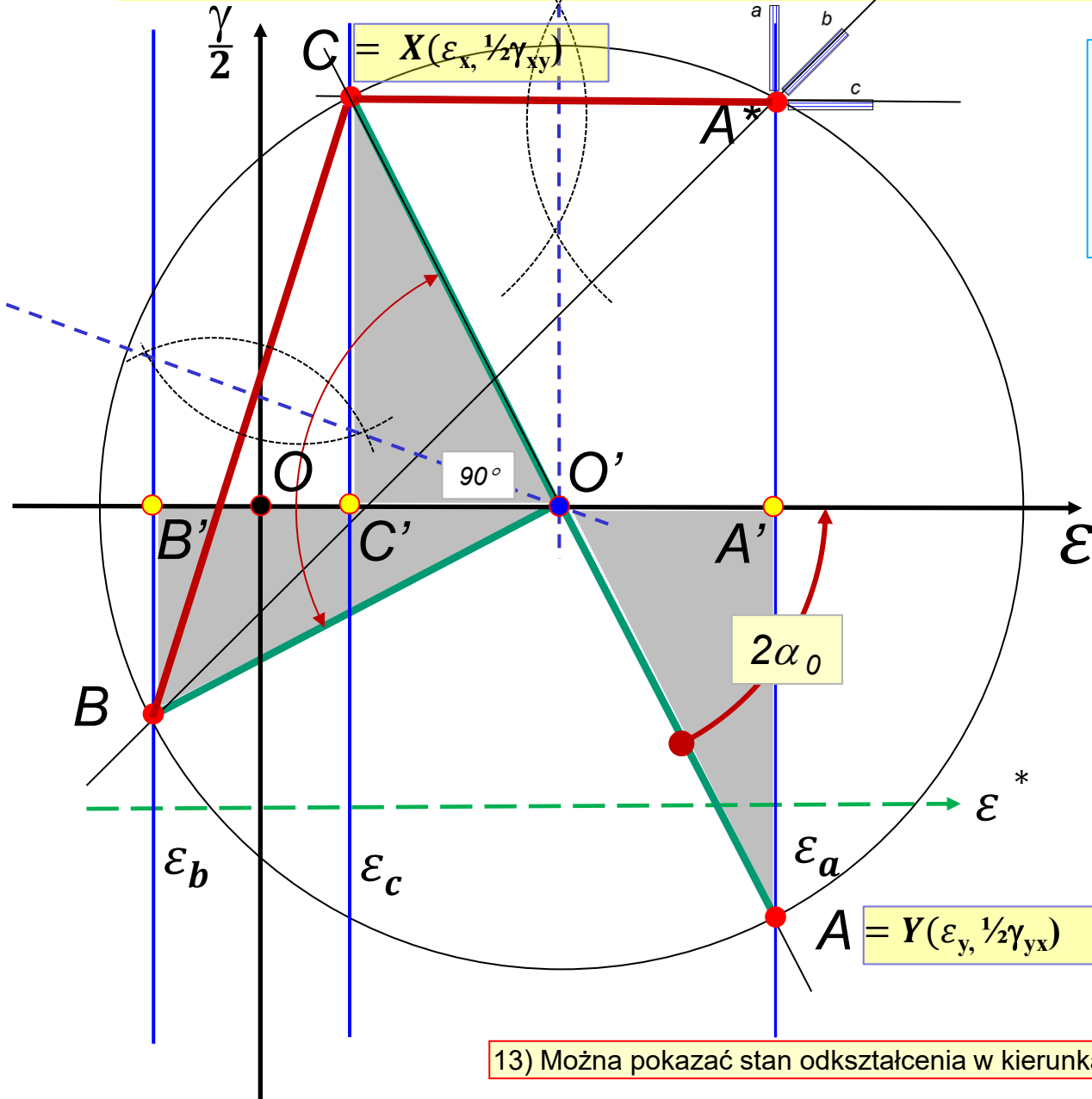
Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



$OO' = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) = 0.25\text{‰}$
 $\varepsilon_x = \varepsilon_c = 0.1\text{‰}$
 $\varepsilon_y = \varepsilon_a = 0.4\text{‰}$
 $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = CC' = O'B' = OO' - \varepsilon_b$
 $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) - \varepsilon_b = 0.45\text{‰}$
 $\gamma_{xy} = 0.9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$
 $\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg(CC'/C'O') = 36^\circ$

12) Korzystając z podobieństwa trójkątów łatwo wyznaczyć odpowiednie wartości

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



$$OO' = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) = 0.25\text{‰}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_c = 0.1\text{‰}$$

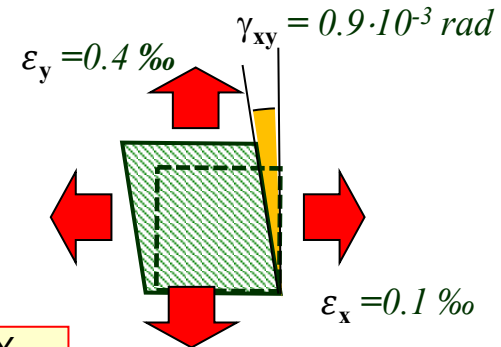
$$\varepsilon_y = \varepsilon_a = 0.4\text{‰}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = CC' = O'B' = OO' - \varepsilon_b$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) - \varepsilon_b = 0.45\text{‰}$$

$$\gamma_{xy} = 0.9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg(CC'/C'O') = 36^\circ$$

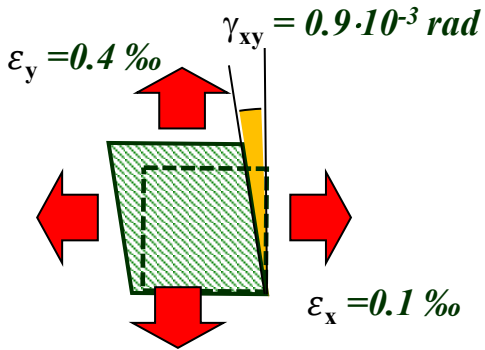


13) Można pokazać stan odkształcenia w kierunkach X, Y

Stan naprężenia

Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w płaskim stanie naprężenia (PSN)

1) w kierunkach nie głównych:



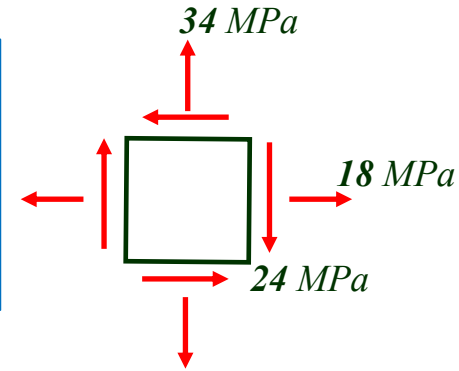
$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\sigma_x = 18 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 34 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 24 \text{ MPa}$$

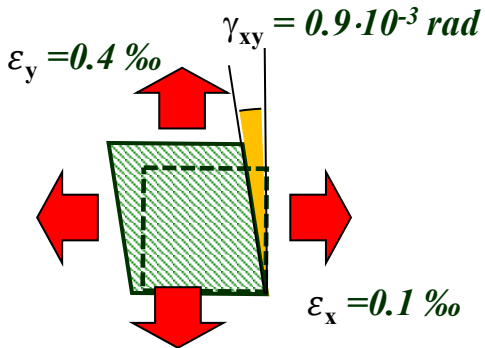


$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 2.65 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

Stan naprężenia

Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w płaskim stanie naprężenia (PSN)

1) w kierunkach nie głównych:



$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

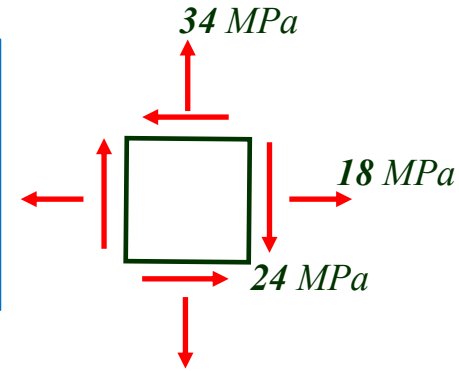
$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\sigma_x = 18 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 34 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 24 \text{ MPa}$$

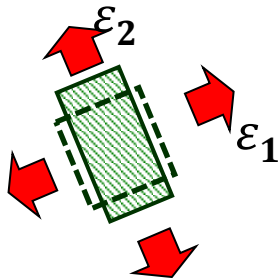


$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 2.65 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

2) w kierunkach głównych:

$$\varepsilon_1 = -0.224 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_2 = 0.724 \text{ ‰}$$

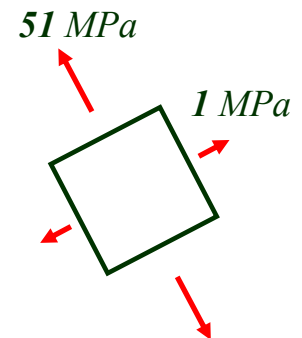


$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1)$$

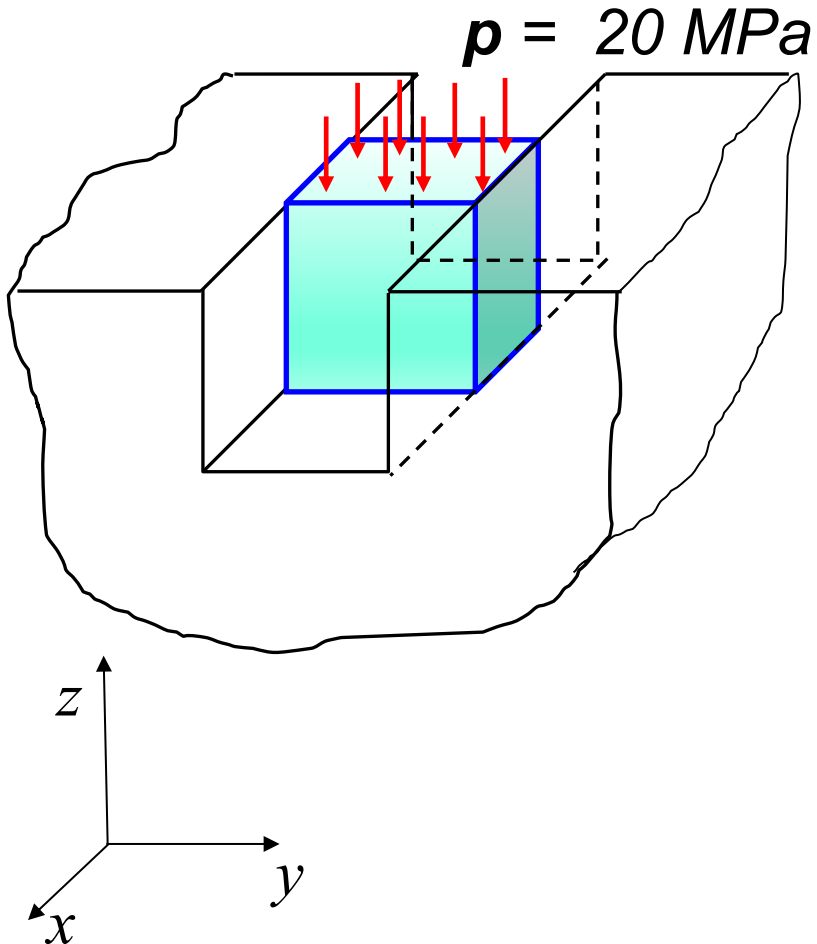
$$\sigma_1 = 1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 51 \text{ MPa}$$



ZADANIE 4.3

Kostkę sześcienną wykonaną z pleksiglasu umieszczono bez luzu i bez tarcia w stalowej pryzmie a następnie obciążono od góry naciskiem o wartości p . Wyznaczyć względną zmianę objętości kostki.

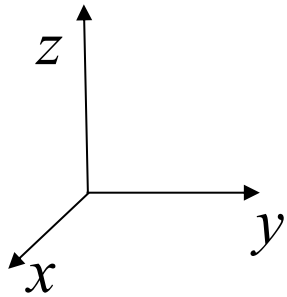
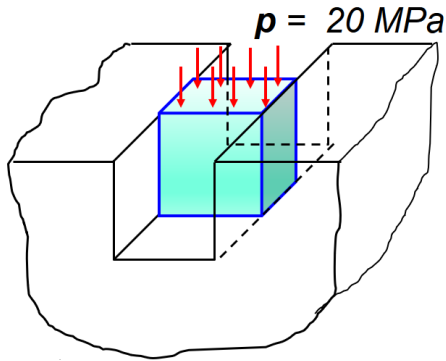


Material – pleksiglas

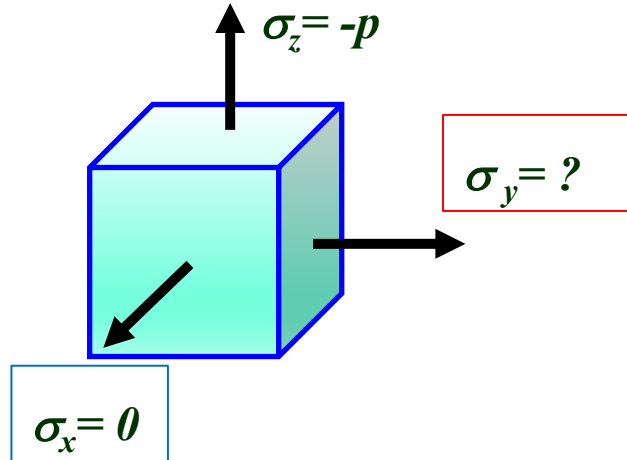
$$E = 3 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.34$$

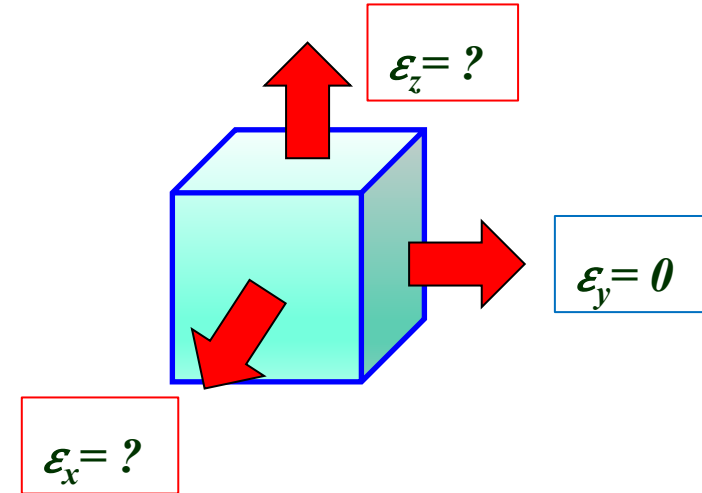
ZADANIE 4.3



Stan naprężenia:



Stan odkształcenia:



$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (0 - \nu(\sigma_y - p)) \\ 0 &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(-p + 0)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (-p - \nu(0 + \sigma_y))\end{aligned}$$

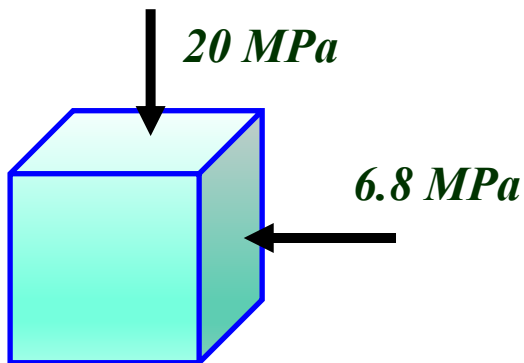
ZADANIE 4.3

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (0 - \nu (\sigma_y - p)) \\ 0 &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (-p + 0)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (-p - \nu (0 + \sigma_y))\end{aligned}$$

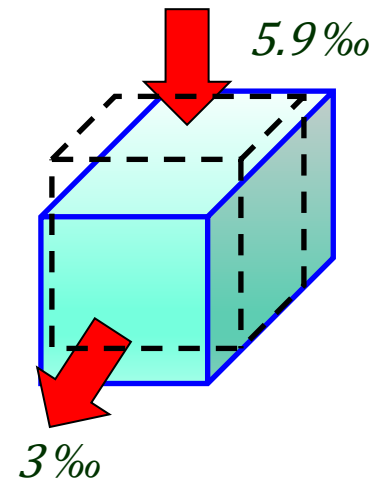


$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\nu p}{E} (1 + \nu) = 0.003 = 3\% \\ \sigma_y &= -\nu p = -6.8 \text{ MPa} \\ \varepsilon_z &= \frac{-p}{E} (1 - \nu^2) = -0.0059 = -5.9\%\end{aligned}$$

Stan naprężenia:



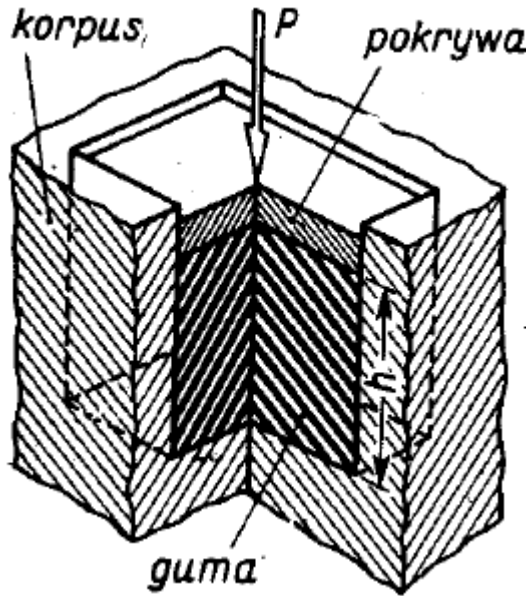
Stan odkształcenia:



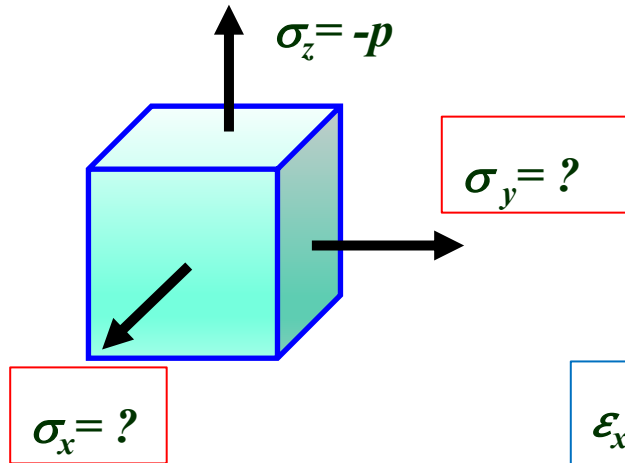
Względna zmiana objętości:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -0.0029 = -2.9\%$$

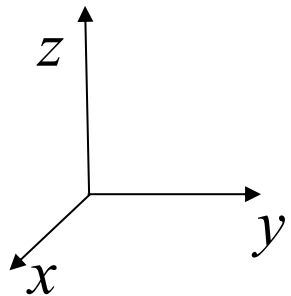
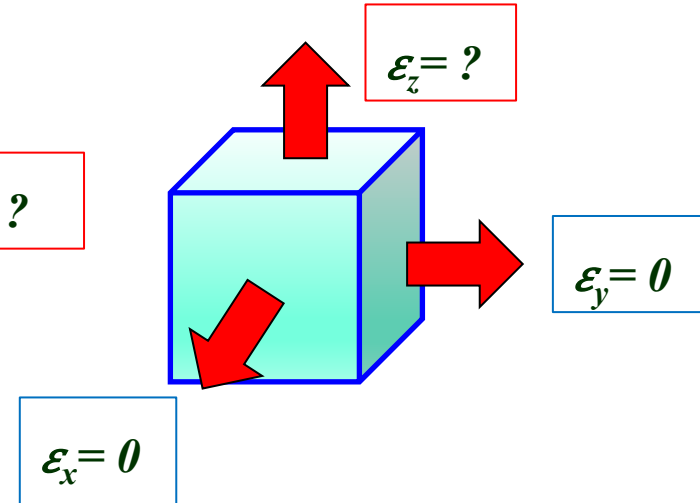
ZADANIE 4.4



Stan naprężenia:



Stan odkształcenia:

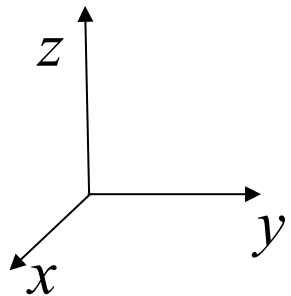
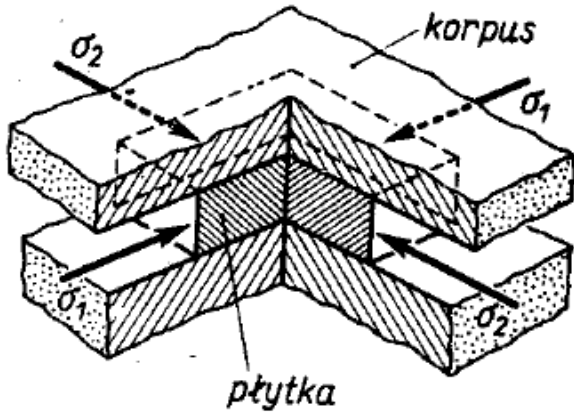


$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$

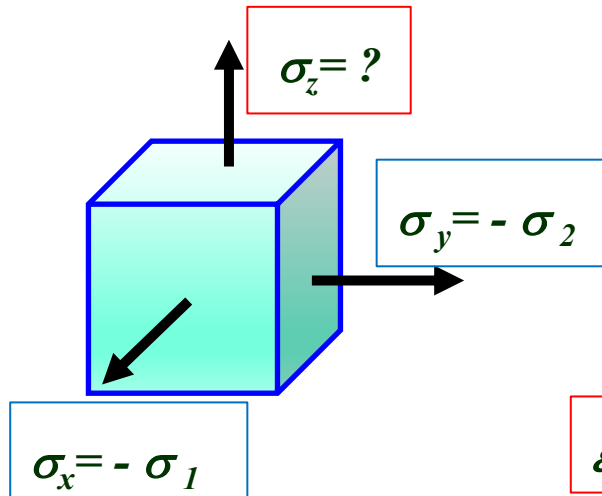


$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y - p)) \\ 0 &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(-p + \sigma_x)) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (-p - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$

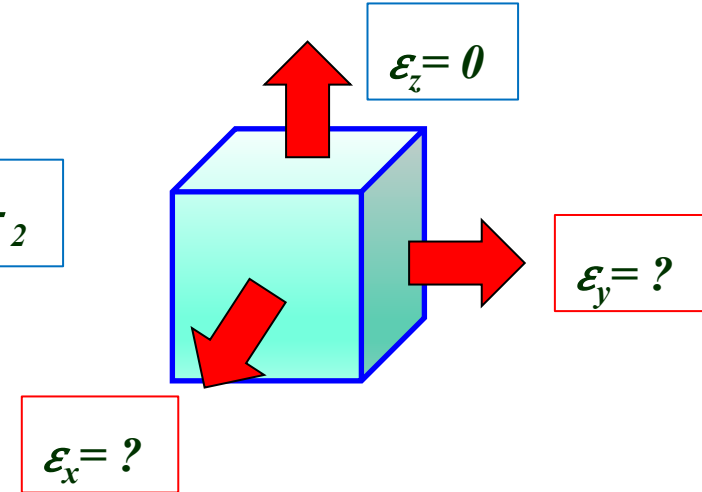
ZADANIE 4.5



Stan naprężenia:



Stan odkształcenia:



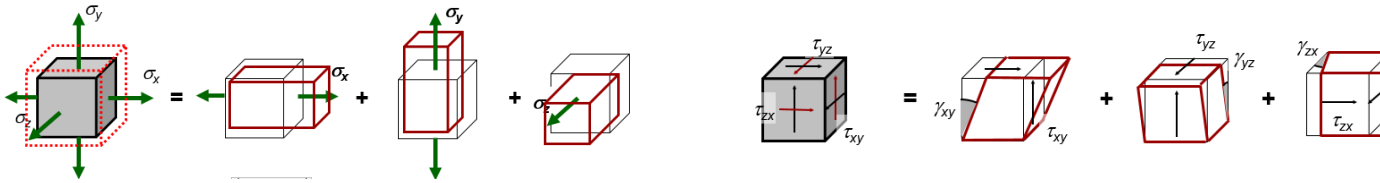
$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (-\sigma_1 - \nu(-\sigma_2 + \sigma_z)) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (-\sigma_2 - \nu(\sigma_z - \sigma_1)) \\ 0 &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(-\sigma_1 - \sigma_2))\end{aligned}$$

Podsumowanie

Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w stanie trójwymiarowym



$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}$$

E - moduł Younga
 ν - stała Poissona
 G - moduł Kirchhoffa

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

wektor składowych naprężenia:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

wektor składowych odkształcenia:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$6 \times 1 \quad 6 \times 6 \quad 6 \times 1$

macierz konstytutywna:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix}$$

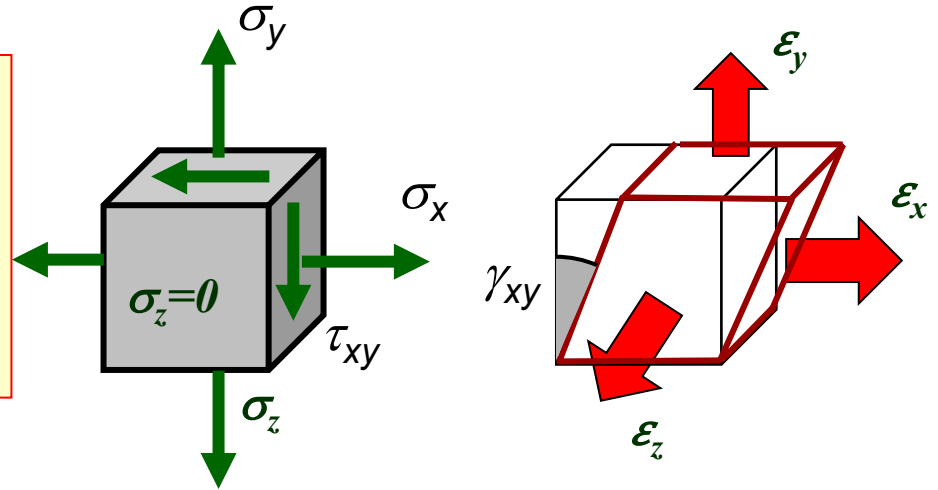
Podsumowanie

Uogólnione Prawo Hooke'a:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}$$

Płaski Stan Naprężenia:

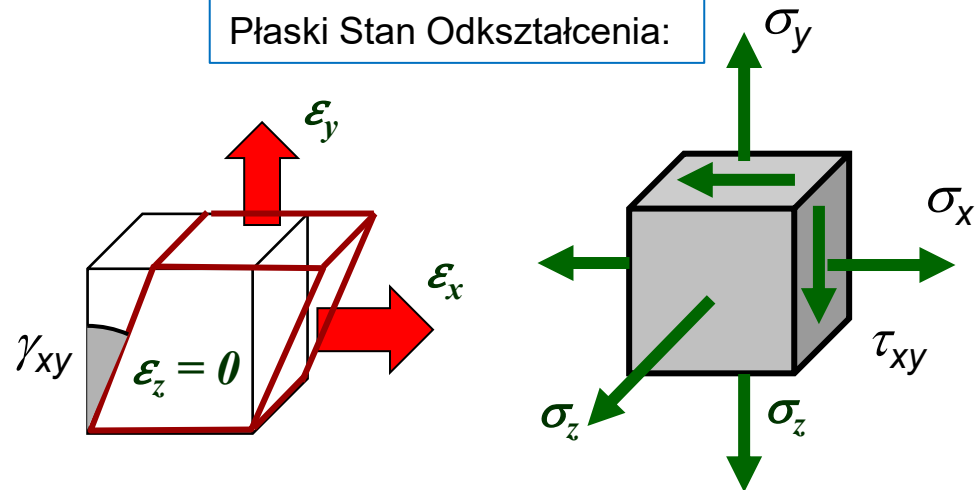


E - moduł Younga
ν - stała Poissona
G - moduł Kirchhoffa

Dla materiałów izotropowych:

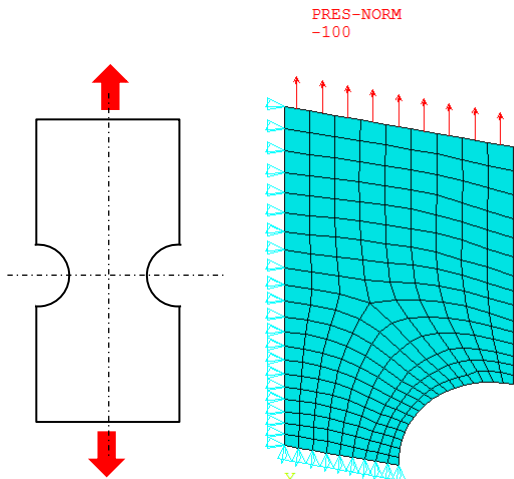
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Płaski Stan Odkształcenia:

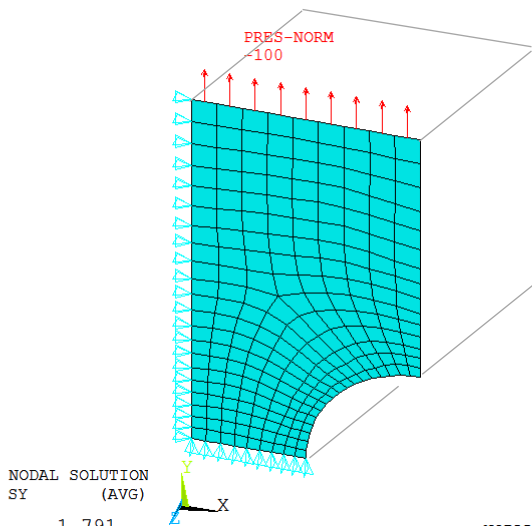


Podsumowanie

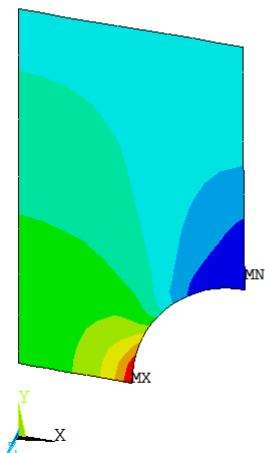
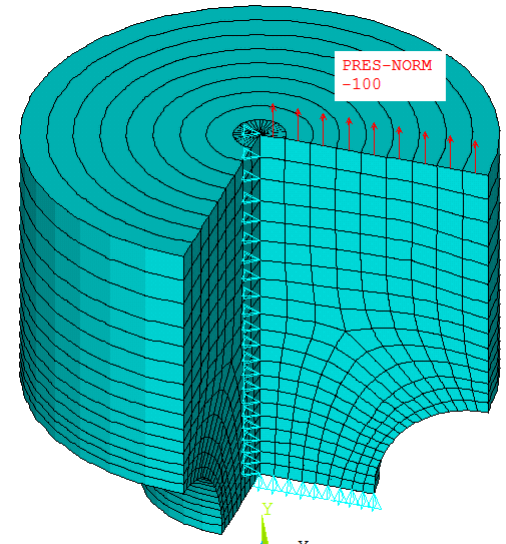
Płaski Stan Naprężenia



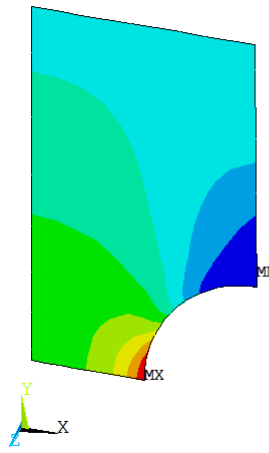
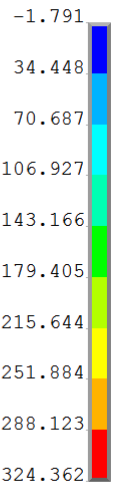
Płaski Stan Odkształcenia



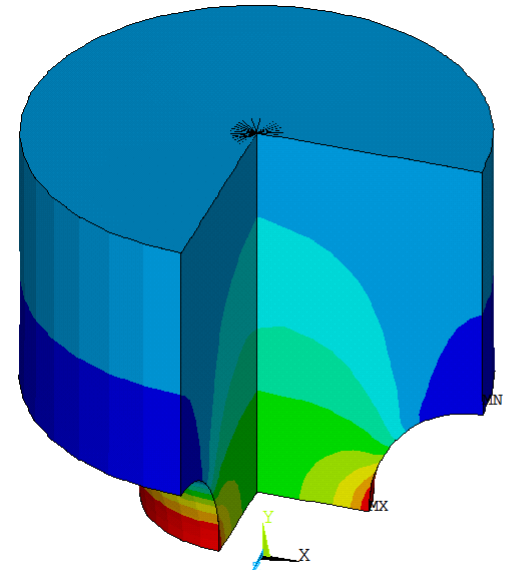
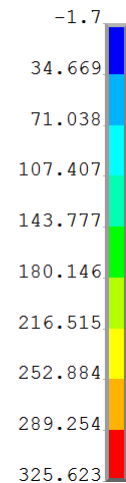
Osiowa symetria



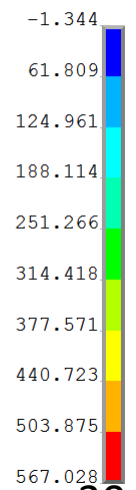
NODAL SOLUTION
SY
(AVG)



NODAL SOLUTION
SY
(AVG)



NODAL SOLUTION
/EXPANDED
SY
(AVG)



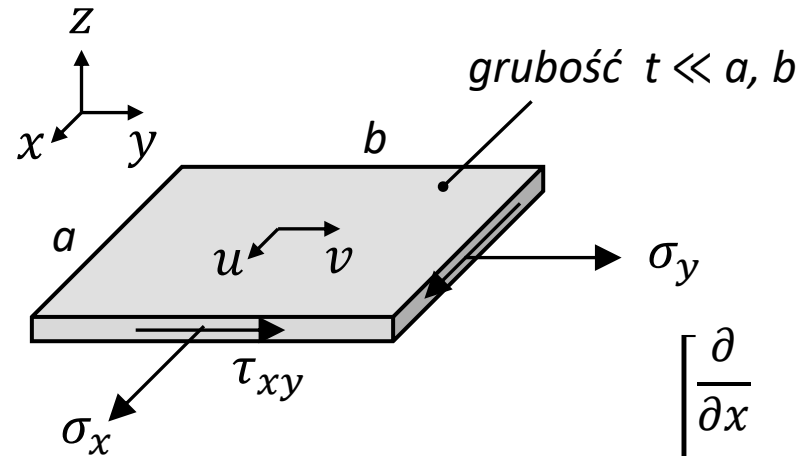
Płaski stan naprężenia (cienkie płyty i powłoki)

$$\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} ; \tau_{yz} = 0 ; \tau_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_x ; \varepsilon_y ; \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} ; \gamma_{yz} = 0 ; \gamma_{zx} = 0$$



wektor przemieszczenia:

$$[u] = [u, v]$$

1×2

$$\{\varepsilon\} = [R]\{u\}$$

$3 \times 1 \quad 3 \times 2 \quad 2 \times 1$

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

3×2
macierz gradientu

wektor składowych odkształcenia:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]$$

1×3

macierz konstytutywna dla PSN:

wektor składowych naprężenia:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$3 \times 1 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 1$

$$[\sigma] = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$$

1×3

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}$$

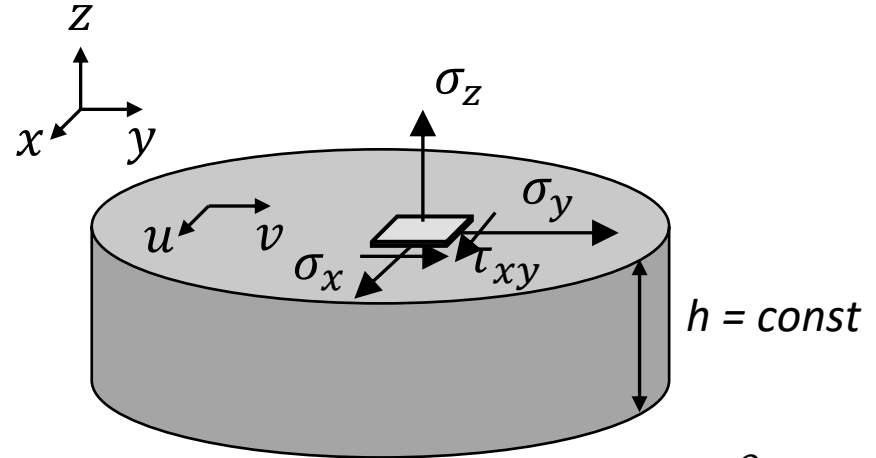
Płaski stan odkształcenia (nieskończenie długa rura, pryzma i wałek)

$$\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\tau_{xy} ; \tau_{yz} = 0 ; \tau_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_x ; \varepsilon_y ; \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} ; \gamma_{yz} = 0 ; \gamma_{zx} = 0$$



wektor przemieszczenia:

$$[u] = [u, v]$$

1×2

wektor składowych odkształcenia:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]$$

1×3

wektor składowych naprężenia:

$$[\sigma] = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$$

1×3

$$\{\varepsilon\} = [R] \{u\}$$

$3 \times 1 \quad 3 \times 2 \quad 2 \times 1$

macierz gradientu

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$3 \times 1 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 1$

macierz konstytutywna dla PSO:

$$[D] = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 2\nu) \end{bmatrix}$$

Osiowa symetria (bryła obrotowa)

$$\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z$$

$$\tau_{xy} ; \tau_{yz} = 0 ; \tau_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_x ; \varepsilon_y ; \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} ; \gamma_{yz} = 0 ; \gamma_{zx} = 0$$

wektor przemieszczenia: $[u] = [u, v]$
 1×2

wektor składowych odkształcenia:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}]$$

1×4

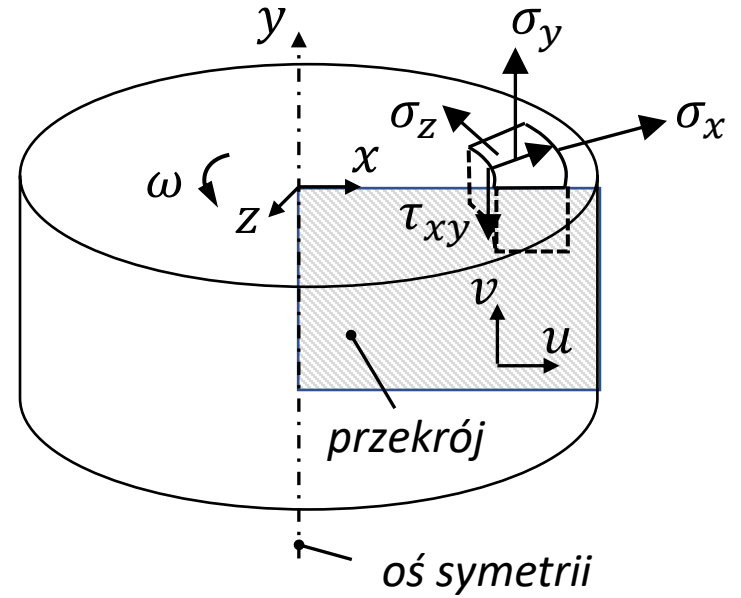
wektor składowych naprężenia:

$$[\sigma] = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}]$$

1×4

$$[D] = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 - \nu \end{bmatrix}$$

kierunki:
 x – promieniowy
 y – osiowy
 z – obwodowy



macierz gradientu:

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

4×2

macierz konstytutywna dla osiowej symetrii